MA2115 Clase 17: Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 Existencia y unicidad de soluciones

Recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación es de la forma

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t),$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y g son funciones definidas en un intervalo abierto I. Supondremos que $a_n(t) = 1$, para todo $t \in I$, con lo cual obtenemos una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \tag{1}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y g son funciones definidas en un intervalo abierto I. A una ecuación de este tipo es posible asociarle un operador diferencial de la forma siguiente: denotamos por D a la derivada usual $\dfrac{d}{dt}$ de funciones, y hacemos

$$L_n = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D^1 + a_0(t)D^0, \tag{2}$$

donde $D^0 = I$ la transformación identidad. Es claro que D^k sólo puede ser aplicado a las funciones que tienen al menos k derivadas, de donde D^k está definido en el espacio vectorial de las funciones a valores reales con k derivadas, denotado por $U(k)$. Como $U(j) \subset U(k)$, siempre que $j \leq k$, L_n está definido en el espacio $U(n)$. Como las derivada es lineal, tenemos que L_n también es lineal, es decir, si a, b son escalares (reales o complejos) y $f, g \in U(n)$, entonces

$$L_n(af + bg) = aL_n(f) + bL_n(g).$$

Observemos que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $L_n(y) = 0$, forma un subespacio vectorial de $U(n)$, ya que dicho conjunto es el espacio anulador o núcleo de L_n. Denotamos por V_{L_n} dicho subespacio.

Con esta notación, la ecuación diferencial se escribe como

$$D^n(y(t)) + a_{n-1}(t)D^{n-1}(y(t)) + \cdots + a_1(t)D(y(t)) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

o simplemente $L_n(y(t)) = g(t)$, para todo $t \in I$.

Una EDO lineal de orden n es llamada *homogénea* cuando es de la forma $L_n(y) = 0$. El siguiente teorema muestra que para resolver una EDO lineal de orden n, $L_n(y) = g$, es suficiente hallar todas las soluciones de la ecuación homogénea $L_n(y) = 0$ y una solución de la ecuación dada.

Teorema 1 *Sea $L_n(y) = g$ una EDO lineal y sea y_p una solución particular. Entonces, y solución de $L_n(y) = g$ si, y sólo si, $y = y_h + y_p$, donde y_h es una solución de la ecuación homogénea $L_n(y) = 0$.*

Demostración: ($\Longrightarrow$) Si y es una solución de $L_n(y) = g$, eligiendo $y_h = y - y_p$ y usando la linealidad de L_n, tenemos que

$$L_n(y_h) = L_n(y - y_p) = L_n(y) - L_n(y_p) = g - g = 0.$$

Es decir, y_h es solución de la ecuación homogénea.
($\Longleftarrow$) Recíprocamente, si y_h es solución de la ecuación homogénea, haciendo $y = y_h + y_p$, tenemos que

$$L_n(y) = L_n(y_h + y_p) = L_n(y_h) + L_n(y_p) = 0 + g = g.$$

Es decir, $L_n(y) = g$. $\square$

Observemos, por otra parte, que siempre es posible expresar una EDO lineal de orden n mediante un sistema de n ecuaciones lineales de orden 1 con n incognitas. Más precisamente, dada la ecuación 1 podemos hacer $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $\ldots$, $x_{n-1} = y^{(n-2)}$, $x_n = y^{(n-1)}$ y, observando que

$$x_n' = y^n = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1 y' - a_0 y + g,$$

obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 \\ x_2' & = & x_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}' & = & x_n \\ x_n' & = & -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + g. \end{array} \right. \tag{3}$$

Expresando este sistema en notación matricial, obtenemos $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

La matriz A obtenida de esta manera es llamada *la matriz compañera* de L_n.

Teorema 2 *Sea $L_n(y) = g$ una EDO lineal de orden n, donde L_n tiene la forma de la ecuación 2, con $a_j(t)$, $0 \leq j \leq n-1$, y $g(t)$ funciones continuas en el intervalo I. Entonces, para cada $t_0 \in I$ y cada conjunto de n datos reales $b_1, b_2, \ldots, b_n$, existe un única solución del problema con valores iniciales*

$$L_n(y) = g, \quad y(t_0) = b_1, y'(t_0) = b_2, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = b_n.$$

Demostración: Sea $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$, el sistema asociado a $L_n(y) = g$. Entonces, el PVI en cuestión se expresa como

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}, \quad \vec{X}(t_0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a las hipótesis, tanto los coeficientes de A como los de $\vec{G}$ son continuos y, en consecuencia, el PVI tiene una solución única. Sea

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

dicha solución. Entonces, en particular, $f_1' = f_2$, $f_2' = f_3 \ldots, f_{n-1}' = f_n$, con lo cual

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ahora, substituyendo $\vec{F}$ en el sistema, obtenemos que $L_n(f_1) = g$. Esto nos da una solución de la ecuación $L_n(y) = g$. La demostración de la unicidad de la solución se deja como ejercicio. $\square$

Ejemplo 1 *Escribir la ecuación*

$$y''' + 5y'' - \frac{3}{2}y' + y = 0$$

como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, y encuentre el polinomio característico de la matriz A asociada al sistema.

Solución: Para encontrar el sistema, hacemos $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$ y usamos la ecuación, con lo cual obtenemos

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= -x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

En forma matricial, tenemos un sistema homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3/2 & -5 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A está dado por

$$p_A(\lambda)\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & -3/2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + 1.$$

Observemos que el operador diferencial de la ecuación está dado por $L = D^3 + 5D^2 - \frac{3}{2}D + I$, el cual podemos describir formalmente como $p_A(D)$. $\square$

El siguiente teorema es una herramienta fundamental para encontrar todas las soluciones de una EDO lineal homogénea dada. Recordemos que V_{L_n} denota el subespacio vectorial de $U(n)$ de todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea $L_n(y) = 0$.

Teorema 3 *Sea $L_n(y) = 0$ una EDO lineal homogénea, donde $L_n = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D^1 + a_0(t)D^0$ con a_j, $0 \leq j \leq n-1$ y g funciones continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces, la dimensión del espacio vectorial V_{L_n} es igual a n. En consecuencia, si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de n soluciones de $L_n(y) = 0$, entonces para cada solución y_h de $L_n(y) = 0$, existen únicas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que*

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + y_n.$$

Definicion 1 *Un conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de n soluciones linealmente independientes de $L_n(y) = 0$ es llamado un* conjuntos fundamental de soluciones*.*

Definicion 2 *Sea $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un conjunto de soluciones de $L_n(y) = 0$. El* Wronskiano *de las n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ está dado por*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Teorema 4 *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de $L_n(y) = 0$, donde $L_n = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D^1 + a_0(t)D^0$ con a_j, $0 \leq j \leq n-1$ y g funciones continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) \neq 0$, para algún $t_0 \in I$.*

Ejemplo 2 *Verifique que*

$$y_1(t) = e^{2t}, \quad y_2(t) = te^{2t}, y_3(t) = e^{3t}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Solución: Para ver que son soluciones calculamos directamente las derivadas de las funciones y luego verificamos que satisfacen la ecuación diferencial, por ejemplo, $y_2(t) = te^{2t}$, $y_2'(t) = e^{2t} + 2te^{2t}$, $y_2'' = 4e^{2t} + 4te^{2t}$ y $y_2''' = 12e^{2t} + 8te^{2t}$, de donde

$$\begin{aligned} y_2''' - 7y_2'' + 16y_2' - 12y_2 &= (12e^{2t} + 8te^{2t}) - 7(4e^{2t} + 4te^{2t}) + 16(e^{2t} + 2te^{2t}) - 12te^{2t} \\ &= (12 - 28 + 16)e^{2t} + (8 - 28 + 32 - 12)te^{2t} = 0. \end{aligned}$$

Para ver que dichas soluciones son linealmente indeendientes basta con verificar que su Wronskiano es distinto de cero en algún t_0. Usando $t_0 = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2, y_3)(t_0) &= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} (0) \\
&= \left| \begin{matrix} e^{2t} & te^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} & 3e^{3t} \\ 4e^{2t} & 4e^{2t} + 4te^{2t} & 9e^{3t} \end{matrix} \right|_{t=0} = \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{matrix} \right| = 1 \neq 0,
\end{aligned}$$

con lo cual $\{y_1, y_2, y_3\}$ es l.i. □

2 Soluciones de EDO lineales de orden n con coeficientes constantes.

Hemos visto que existe una correspondencia biyectiva entre las soluciones f de una EDO de la forma $L_n(y) = g$ y las soluciones $\vec{F}$ de un SEDL de la forma $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$, donde $L_n \mapsto A$ su matriz compañera,

$$g \mapsto \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f \mapsto \vec{F} = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Más aún, una EDO lineal homogénea $L_n(y) = 0$ con coeficientes constantes siempre tiene n soluciones linealmente independientes, las cuales generan a todas las soluciones de la ecuación. Ahora presentaremos el método para encontrar las soluciones de $L_n(y) = 0$. El hecho fundamental subyacente es que la matriz compañera de un operador diferencial tiene la propiedad que todos sus autovalores tienen multiplicidad geométrica igual a 1. Sin embargo, nos limitaremos a describir el procedimiento para encontrar un conjunto fundamental de soluciones para una EDO lineal homogénea con coeficientes constantes.

Comenzamos con la simple observación: dado $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D^1 + a_0 D^0$ con a_j constantes reales para cada $0 \leq j \leq n-1$, y suponiendo que $y(t) = e^{\lambda t}$ es una solución de la EDO homogénea $L_n(y) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 = L_n(y) &= L_n(e^{\lambda t}) = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D^1 + a_0 D^0)(e^{\lambda t}) \\
&= \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

El polinomio $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, es llamado *el polinomio característico* asociado al operador L_n (o a la ecuación $L_n(y) = g$). Hemos visto que $y(t) = e^{\lambda_0 t}$ es solución de la ecuación $L_n(y) = 0$ si, y sólo si, λ_0 es una raíz de $p(\lambda)$.

Comenzamos con el caso sencillo de una ecuación de la forma $(D - \mu)^n y = 0$. En este caso, afirmamos que las funciones $e^{\mu t}$, $te^{\mu t}$, $t^2 e^{\mu t}, \ldots,$ $t^{n-1}e^{\mu t}$ son soluciones de $(D - \mu)^n y = 0$. En efecto, si $j < n$ entonces

$$\begin{aligned}(D-\mu)^n\left(t^j e^{\mu t}\right) &= (D-\mu)^{n-1}(D-\mu I)\left(t^j e^{\mu t}\right)\\ &= (D-\mu)^{n-1}\left(jt^{j-1}e^{\mu t}+\mu t^j e^{\mu t}-\mu t^j e^{\mu t}\right)\\ &= (D-\mu)^{n-1}\left(jt^{j-1}e^{\mu t}\right)\\ &= j(D-\mu)^{n-1}\left(t^{j-1}e^{\mu t}\right),\end{aligned}$$

es decir, $(D-\mu)^n\left(t^j e^{\mu t}\right) = j(D-\mu)^{n-1}\left(t^{j-1}e^{\mu t}\right)$, e iterando esta última identidad, tenemos que

$$\begin{aligned}(D-\mu)^n\left(t^j e^{\mu t}\right) &= j(D-\mu)^{n-1}\left(t^{j-1}e^{\mu t}\right)\\ &= j(j-1)(D-\mu)^{n-2}\left(t^{j-2}e^{\mu t}\right)\\ &\vdots\\ &= j(j-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1(D-\mu)^{n-j+1}\left(e^{\mu t}\right)=0.\end{aligned}$$

Para resolver el caso general, consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ las raíces (reales ó complejas) de $p(\lambda)$ y, para cada $1 \le j \le k$, sea m_j la multiplicidad de λ_j en $p(\lambda)$. Es decir,

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k},$$

donde $m_j > 0$, para cada $1 \le j \le k$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_j = n$ y $\lambda_j \ne \lambda_l$, si $j \ne l$. Entonces, con idea de hallar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $L_n(y) = 0$, basta con hallar (o construir) m_j soluciones linealmente independientes a partir de λ_j, de la ecuación. Más precisamente, observemos, por una parte, que

$$L_n = p(D) = (D-\lambda_1 I)^{m_1}(D-\lambda_2 I)^{m_2}\ldots(D-\lambda_k I)^{m_k}, \tag{4}$$

con lo cual las soluciones de la ecuación $(D-\lambda_j I)^{m_j}(y) = 0$, para cada $1 \le j \le k$, son soluciones de $L_n(y) = 0$ y, por otra parte, para cada $1 \le j \le k$, las funciones

$$e^{\lambda_j t},\ \ te^{\lambda_j t},\ \ t^2 e^{\lambda_j t}, \ldots,\ \ t^{m_j-1}e^{\lambda_j t}$$

son soluciones de $(D-\lambda_j I)^{m_j}(y) = 0$, con lo cual podemos obtener $m_1+m_2+\cdots+m_k = n$ soluciones de $L_n(y) = 0$, las cuales son linealmente independientes de acuerdo al siguiente:

Lema 1 *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ números reales o complejos distintos entre sí, y sean $m_1, m_2, \ldots, m_j$ enteros positivos cualesquiera. Entonces, el conjunto*

$$\left\{t^l e^{\lambda_j t} \colon j = 1, 2, \ldots, k,\ l = 1, 2, \ldots, m_j\right\}$$

es linealmente independiente en $U_{\mathbb{C}} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$.

Por último, si $\lambda_j = a_j + b_j i$ es una raíz compleja no real de $p(\lambda)$, entonces su conjugado $\bar{\lambda_j} = a_j - b_j i$ debe ser también una raíz de $p(\lambda)$, ya que los coeficientes de $p(\lambda)$ son reales, y, en este caso, para obtener soluciones reales con respecto a λ_j y $\bar{\lambda_j}$ remplazamos $t^l e^{\lambda_j t}$ y $t^l e^{\bar{\lambda_j} t}$ por sus combinaciones lineales $t^l e^{a_j t}\cos(b_j t)$ y $t^l e^{a_j t}\operatorname{sen}(b_j t)$. En particular, tenemos que, dado un número complejo no real $\mu = a + bi$, las funciones de la forma $t^j e^{at}\cos(bt)$ y $t^j e^{at}\operatorname{sen}(bt)$, con $j < m$, son soluciones de la ecuación $[(D-\mu I)(D-\bar{\mu})]^m(y) = 0$ o $(D^2 - 2aD + (a^2+b^2)I)^m(y) = 0$, ya que

$$(D-\mu I)(D-\bar{\mu}) = (D^2 - (\mu+\bar{\mu})D + \mu\bar{\mu}) = D^2 - 2aD + (a^2+b^2)I.$$

En suma, obtenemos el siguiente:

Teorema 5 *Sea $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D^1 + a_0 D^0$ con a_j constantes reales para cada $0 \leq j \leq n-1$, y supongamos que el polinomio característico $p(\lambda)$ se puede factorizar como*

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k},$$

donde $m_j > 0$, para cada $1 \leq j \leq k$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_j = n$ y $\lambda_j \neq \lambda_l$, si $j \neq l$. Entonces el conjunto

$$\left\{t^l e^{\lambda_j t} \colon j = 1,2,\ldots,k,\ l = 1,2,\ldots,m_j\right\}$$

forma un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea $L_n(y) = 0$, con la excepción que si $\lambda_j = a_j + b_j i$ es una raíz compleja no real de $p(\lambda)$, entonces usamos $t^l e^{a_j t}\cos(b_j t)$ y $t^l e^{a_j t}\operatorname{sen}(b_j t)$ en lugar de $t^l e^{\lambda_j t}$ y $t^l e^{\bar{\lambda}_j t}$.

Ejemplo 3 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$$

Solución: El polinomio característico de esta ecuación está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2).$$

De acuerdo al teorema, las funciones

$$y_1(t) = e^t,\ \ y_2(t) = e^{-t},\ \ y_3(t) = e^{-2t},$$

forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación dada y, en consecuencia, la solución general de dicha ecuación está dada por

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t},$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo 4 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Solución: El polinomio característico de esta ecuación está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3.$$

De acuerdo al teorema anterior, las funciones

$$y_1(t) = e^t,\ \ y_2(t) = te^t,\ \ y_3(t) = t^2 e^t,$$

forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación dada y, en consecuencia, la solución general de dicha ecuación está dada por

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 t^2 e^t = (c_1 + c_2 t)\,e^t + c_3 t^2 e^t,$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo 5 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Solución: El polinomio característico de esta ecuación está dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 \\ &= (\lambda - 1)^2 + 2^2 = [(\lambda - 1) + 2i][(\lambda - 1) - 2i] = [\lambda - (1 - 2i)][\lambda - (1 + 2i)]. \end{aligned}$$

Es decir, $p(\lambda)$ tiene dos raíces complejas, $\mu = 1 - 2i$ y $\bar{\mu} = 1 + 2i$. De acuerdo al teorema, las funciones

$$y_1(t) = e^t \cos(2t), \;\; y_2(t) = e^t \operatorname{sen}(2t),$$

forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación dada y, en consecuencia, la solución general de dicha ecuación está dada por

$$y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \operatorname{sen}(2t) = e^t \left(c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) \right)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo 6 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y^{iv} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0.$$

Solución: El polinomio característico de esta ecuación está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25 = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right)^2 = [\lambda - (1 - 2i)]^2 [\lambda - (1 + 2i)]^2.$$

Es decir, $p(\lambda)$ tiene dos raíces complejas, $\mu = 1 - 2i$ y $\bar{\mu} = 1 + 2i$, ambas con multiplicidad 2. De acuerdo al teorema, las funciones

$$y_1(t) = e^t \cos(2t), \;\; y_1(t) = te^t \cos(2t), \;\; y_3(t) = e^t \operatorname{sen}(2t), \;\; y_4(t) = te^t \operatorname{sen}(2t),$$

forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación dada y, en consecuencia, la solución general de dicha ecuación está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t \cos(2t) + c_2 te^t \cos(2t) + c_3 e^t \operatorname{sen}(2t) + c_4 te^t \operatorname{sen}(2t) \\ &= (c_1 + c_2 t)\, e^t \cos(2t) + (c_3 + c_4 t)\, e^t \operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □